

成城大学 2025 年度 学部別選抜 (A方式)
2月4日：数学

■解答例

[1] (1) $P(1) = 1 + (a - 1) + (2 - a) - 2 = 0$

(2) (1) より, $P(x)$ は $x - 1$ を因数としてもつ。割り算を実行すれば,

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + ax + 2)$$

よって, $P(x) = 0$ の実数解の 1 つは $x = 1$ である。2 次方程式 $x^2 + ax + 2 = 0$ の判別式は, $D = a^2 - 8$ であることから, 次のように場合分けする。

(i) $a < -2\sqrt{2}$, $a > 2\sqrt{2}$ のとき。2 次方程式 $x^2 + ax + 2 = 0$ は異なる 2 つの実数解

$$\frac{-a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}, \quad \frac{-a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}$$

をもつ。

2 つの解の 1 つが $x = 1$ であるとする, $x = 1$ を $x^2 + ax + 2 = 0$ に代入して, $a = -3$ が得られる。このとき, $P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 2 となる。そして, これ以外の場合には, $P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 3 となる。

(ii) $a = \pm 2\sqrt{2}$ のとき。2 次方程式 $x^2 + ax + 2 = 0$ は重解 $x = \mp\sqrt{2}$ をもつ。いずれにしても $x = 1$ とは一致しないから, この場合 $P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 2 である。

(iii) $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$ のとき。2 次方程式 $x^2 + ax + 2 = 0$ は実数解をもたない。よって, $P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 1 である。

以上をまとめると,

- $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$ のとき, $P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 1
- $a = \pm 2\sqrt{2}$, $a = -3$ のとき, $P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 2
- $a < -3$, $-3 < a < -2\sqrt{2}$, $a > 2\sqrt{2}$ のとき, $P(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 3 となる。

- [2] (1) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ の両辺を 2 乗すると、 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \frac{7}{16}$ となる。左辺を展開すると

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$$

に等しいから、 $1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{7}{16}$ 。よって、 $\sin \theta \cos \theta = \frac{9}{32}$

- (2) まず、 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = (\sin \theta - \cos \theta)^2 + 4 \sin \theta \cos \theta$ に注意する。ここで、与えられた条件 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ と (1) から、

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{7}{16} + 4 \times \frac{9}{32} = \frac{25}{16}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので、 $\sin \theta > 0$ 、 $\cos \theta > 0$ であるから、 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{5}{4}$

- (3) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ であるから、(1) の結果を代入して、 $\sin 2\theta = \frac{9}{16}$

【別解】 条件 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ と (2) より、

$$\sin \theta = \frac{5 + \sqrt{7}}{8}, \quad \cos \theta = \frac{5 - \sqrt{7}}{8}$$

さらに、2 倍角の公式より、 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{16}$ が得られる。

- (4) 2 倍角の公式を用いると、条件 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ と (2) より、

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) = -\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

【別解】 (3) の別解を用いれば、

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \left(\frac{5 + \sqrt{7}}{8} \right)^2 = -\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{8} \right)^2 - 1 = -\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

とも計算できる。

[3] はじめに、与えられた漸化式に番号をつけて

$$a_{n+1} = -a_n + 4b_n \quad (1)$$

$$b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad (2)$$

とする。(2) から、

$$a_n = b_{n+1} - 2b_n \quad (3)$$

さらに $a_{n+1} = b_{n+2} - 2b_{n+1}$ が得られる。これらを (1) に代入すると、

$$\begin{aligned} b_{n+2} - 2b_{n+1} &= -b_{n+1} + 2b_n + 4b_n \\ \Rightarrow b_{n+2} - b_{n+1} - 6b_n &= 0 \end{aligned}$$

この式は、次のように 2 通りに変形できる：

$$\begin{aligned} b_{n+2} - 3b_{n+1} &= -2(b_{n+1} - 3b_n), \\ b_{n+2} + 2b_{n+1} &= 3(b_{n+1} + 2b_n) \end{aligned}$$

また、(2) より、 $b_2 = a_1 + 2b_1 = 5$ であるから、 $b_2 - 3b_1 = -1$ 、 $b_2 + 2b_1 = 9$ 。よって、

- 数列 $\{b_{n+1} - 3b_n\}$ は、初項 -1 、公比 -2 の等比数列
- 数列 $\{b_{n+1} + 2b_n\}$ は、初項 9 、公比 3 の等比数列

である。ゆえに、

$$\begin{aligned} b_{n+1} - 3b_n &= (-1) \cdot (-2)^{n-1} = -(-2)^{n-1} \\ b_{n+1} + 2b_n &= 9 \cdot 3^{n-1} = 3^{n+1} \end{aligned}$$

となる。辺々引くと

$$b_n = \frac{3^{n+1} + (-2)^{n-1}}{5}$$

が得られる。さらに、これを (3) に代入して、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3^{n+2} + (-2)^n}{5} - 2 \frac{3^{n+1} + (-2)^{n-1}}{5} = \frac{(3-2)3^{n+1} + (-2-2)(-2)^{n-1}}{5} \\ &= \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1}}{5} \end{aligned}$$

となる。

■出題意図

[1]

因数定理を理解し、多項式の割り算を実行できること、そして2次方程式の判別式を用いて、与えられた方程式の実数解の個数を求めることができることをチェックするのが狙いである。

[2]

三角関数に関する基本的な理解と、公式を用いた計算ができるかどうかを確認する質問である。(1)から(4)まで、教科書レベルの公式の理解と計算能力があれば対応できる問題であり、基礎的な能力を確認することとした。

[3]

2つの漸化式で表された数列について、これを一次の形の隣接二項間の漸化式に帰着させて等比数列であることを見いだして、その一般項を求めることができるといった、数列に関する基礎的な能力を有することを確認する問題である。

成城大学 2025 年度 学部別選抜 (A方式)
2月5日：数学

■解答例

[1] (1) 平均値は,

$$\frac{4 \times 2 + 5 \times 1 + 6 \times 1 + 7 \times 1 + 8 \times 2 + 9 \times 2 + 10 \times 1}{10} = 7 \text{ (点)}$$

となる。また、偏差平方和が $9 \times 3 + 4 \times 3 + 1 \times 3 + 0 = 42$ となることから、分散は

$$\frac{42}{10} = 4.2$$

(2) 平均値は,

$$\frac{3 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 3 + 6 \times 2 + 7 \times 1 + 9 \times 1 + 10 \times 1}{10} = 6 \text{ (点)}$$

となる。中央値は、小さい方から 5 番目の値 5 と 6 番目の値 6 との平均値となり、5.5 (点)。最頻値は、観測値の個数が 3 で最も多い 5 (点)。

(3) テスト A の分散は、上記 (1) より 4.2、テスト B の分散も同様に求めると、

$$\frac{16 \times 1 + 9 \times 2 + 4 \times 1 + 1 \times 4 + 0}{10} = 4.2$$

となる。

次に、テスト A の得点とテスト B の得点の共分散を求める。テスト A の得点が 7、あるいはテスト B の得点が 6 の観測値に対しては偏差の積が 0 となることに注意すると、

$$\frac{(-3) \times 3 + (-3) \times 1 + (-2) \times 4 + 1 \times (-1) + 1 \times (-3) + 2 \times (-1) + 3 \times (-1)}{10} = -2.9$$

と共分散が求まる。相関係数は共分散を 2 つの変数の標準偏差の積で割ったものであるので、

$$r_{AB} = \frac{-2.9}{\sqrt{4.2} \times \sqrt{4.2}} = -\frac{2.9}{4.2} = -0.690$$

よって、答は -0.69 である。

[2] (1) まず、放物線と直線の交点を求める。

$$(x-1)-(x^2-4x+3)=0 \Rightarrow -(x-1)(x-4)=0$$

よって、2つの交点は(1,0)と(4,3)である。放物線と直線で囲まれる図形の面積の公式より、求める図形の面積は、

$$\int_1^4 \{x-1-(x^2-4x+3)\}dx = -\int_1^4 (x-1)(x-4)dx = -\left\{-\frac{1}{6}(4-1)^3\right\} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

(2) 曲線 $y = |x^2 - 4x + 3|$ のグラフは、

- $x < 1, 3 < x$ のとき、 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフ
- $1 \leq x \leq 3$ のとき、 $y = -x^2 + 4x - 3$ のグラフ

となる。それぞれの頂点や交点は、図2の通りである。

(1) で求めた領域をEとする。そして、

- A を、放物線 $y = -x^2 + 4x - 3$ と直線 $y = x - 1$ で囲まれた範囲
- B を、 x 軸と放物線 $y = -x^2 + 4x - 3$ と直線 $y = x - 1$ で囲まれた範囲
- C を、 x 軸と放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ で囲まれた範囲
- D を、放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と放物線 $y = -x^2 + 4x - 3$ と直線 $y = x - 1$ で囲まれた範囲

とすると、求めるべき面積はAの面積とDの面積の和である。Aの面積は(1)と同じ考え方で、 $\frac{1}{6}(2-1)^3 = \frac{1}{6}$ と求まる。Cの面積も同様に計算して、 $\frac{1}{6}(3-1)^3 = \frac{8}{6}$ となる。Bは、Cを x 軸に関して対称にひっくり返した図形の面積からAを差し引いた部分なので、その面積は $\frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$ である。Dは、EからBとCを差し引いた部分なので、その面積は $\frac{27}{6} - \frac{7}{6} - \frac{8}{6} = \frac{12}{6}$ である。よって、答は $\frac{1}{6} + \frac{12}{6} = \frac{13}{6}$ となる。

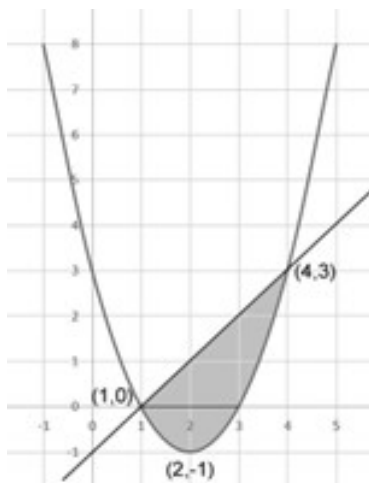


図 1: (1) のグラフ

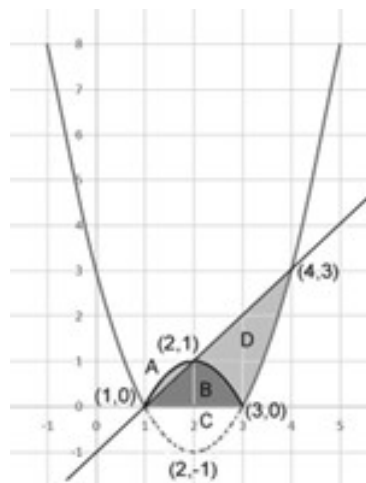


図 2: (2) のグラフ

[3] $\vec{d} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ とおく。

(1) 内積は, $\vec{d} \cdot \vec{p} = 1 \times x + 0 \times y + 0 \times z = x$, $\vec{e} \cdot \vec{p} = 0 \times x + 1 \times y + 0 \times z = y$ であり, 大きさは, $|\vec{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ となる。

(2) 三角形 OAP は辺の長さが 1 の正三角形なので, $\vec{d}$ と $\vec{p}$ のなす角は 60° , かつ $|\vec{d}| = 1$, $|\vec{p}| = 1$ である。これらと (1) を内積の定義に代入すると,

$$x = \vec{d} \cdot \vec{p} = |\vec{d}| |\vec{p}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

同様に, $\vec{e}$ と $\vec{p}$ のなす角は 60° , かつ $|\vec{e}| = 1$, $|\vec{p}| = 1$ であるから, (1) より

$$y = \vec{e} \cdot \vec{p} = |\vec{e}| |\vec{p}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

さらに, 辺 OP の長さも 1 なので, $|\vec{p}| = 1$ および $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ より,

$$|\vec{p}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + z^2 = 1^2 \Rightarrow z^2 = \frac{1}{2}$$

$z > 0$ であるから, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を得る。つまり, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) まず, 三角形 OAP の内接円の中心を Q とおき, その座標を求める。正三角形の内心と重心は一致するので,

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{(0,0,0) + \vec{d} + \vec{p}}{3} = \frac{(0,0,0) + (1,0,0) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{3} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

したがって, 円の内心 Q の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$ 。

次に, 円の半径を求める。点 Q から辺 OA へ下ろした垂線を QH とすると, 内接円の性質より QH の長さが円の半径となる。内心は三角形の内角の 2 等分線の交点であるから, $\angle QOH = 30^\circ$, したがって, 三角形 OQH は一つの角が 30° である直角三角形であるから, $QH : OQ = 1 : 2$ である。上で求めた Q の座標を用いると,

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

よって, $OQ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ となるから, $QH : OQ = 1 : 2$ より, $QH = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 。したがって, 三角形 OAP の内接円の半径は $\frac{\sqrt{3}}{6}$ である。

【別解】QH を求める際に, H は OA の中点なので, $OH = \frac{1}{2}$ より, $QH = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot OH = \frac{\sqrt{3}}{6}$ とも計算できる。あるいは, 正三角形 OAP の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ であるから, 内接円の半径を r とおくと, $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot r \cdot 3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ となり, これを r について解けば, $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ を得る。

■出題意図

[1]

データ分析についての基本的な知識を持ち、それを用いて基本的統計量の計算が実施可能かどうかを問う問題である。2種類のテスト得点のデータを与えて、代表値（平均値、中央値、最頻値）の理解を確認し、分散と標準偏差の理解と計算、そして相関係数を理解していて、計算ができるかどうかを試した。

[2]

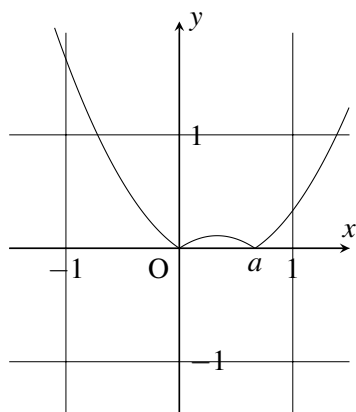
二次関数や直線を xy 座標平面上に正確に描けること（交点の座標も含めて）、かつ絶対値を含むグラフを描けるかどうかが最初の関門となる。その上で、グラフ上で示された範囲の面積を出すのは、積分の計算をしなくても、公式を理解していれば計算できる。手際よく解答できるかどうかを試す問題である。

[3]

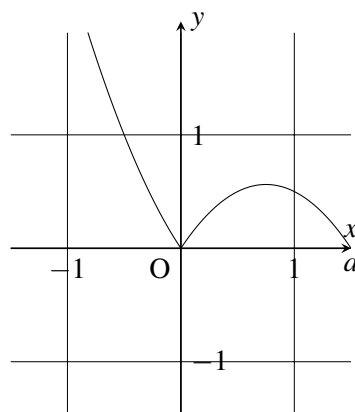
（1）と（2）は空間ベクトルの基礎的な知識の確認とそれを具体的な空間図形の問題に応用できるかを試す問題である。（3）はベクトルの知識に加え、三角形の性質や三角比などの図形に関する知識も必要に応じて組み合わせ問題を解決できるかを試す問題である。

成城大学 2025 年度 学部別選抜 (A方式)
2月6日：数学

■解答例



$0 < a < 1$ のとき



$1 \leq a$ のとき

[1] (i) $0 < a < 1$ のとき,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |x^2 - ax| dx = \int_0^a (-x^2 + ax) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 \right]_a^1 = -\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^3 - 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a - \left(\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^3 \right) \\ &= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

S を a で微分すると, $S' = a^2 - \frac{1}{2}$ となり, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ で極値をとる。増減表は

a	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
S'		-	0	+	
S		$\searrow$	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	

となるので, S は $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ で最小値をとり, このとき, $S = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$ である。

(ii) $1 \leq a$ のとき,

$$S = \int_0^1 |x^2 - ax| dx = \int_0^1 (-x^2 + ax) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}$$

S を a で微分すると, $S' = \frac{1}{2} > 0$ なので, $a = 1$ で最小となり, このとき, $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ である。

(i), (ii) より, S は $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ で最小値をとり, このとき, $S = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$ である。

[2] (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2025}$ の常用対数をとると,

$$\log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{2025} = -2025 \log_{10} 2 = -2025 \times 0.3010 = -609.525$$

よって,

$$-610 < \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{2025} < -609$$

となるから,

$$10^{-610} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2025} < 10^{-609}$$

ゆえに $\left(\frac{1}{2}\right)^{2025}$ は小数第 610 位に初めて 0 でない数字が現れる。

(2) $\log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{2025} = -609.525 = -610 + 0.475$ と変形し, 指数法則 $a^{r+s} = a^r a^s$ を用いると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2025} = 10^{-609.525} = 10^{-610+0.475} = 10^{0.475} \times 10^{-610} \quad (*)$$

ここで

$$\log_{10} 2 = 0.3010 < 0.475 < \log_{10} 3 = 0.4771$$

すなわち

$$\log_{10} 2 < \log_{10} 10^{0.475} < \log_{10} 3$$

よって

$$2 < 10^{0.475} < 3$$

この不等式と (*) を組み合わせれば,

$$2 \times 10^{-610} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2025} < 3 \times 10^{-610}$$

が得られる。ゆえに, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2025}$ の小数点以下に初めて現れる 0 でない数字は 2 である。

[3] 題意より、点 P は直線 $y = -x + 3$ 上の点である。まず、カードの可能な出方 (m, n) は 30 通りで同様に確からしく、コイン投げの結果も表と裏が同様に確からしいことに注意する。

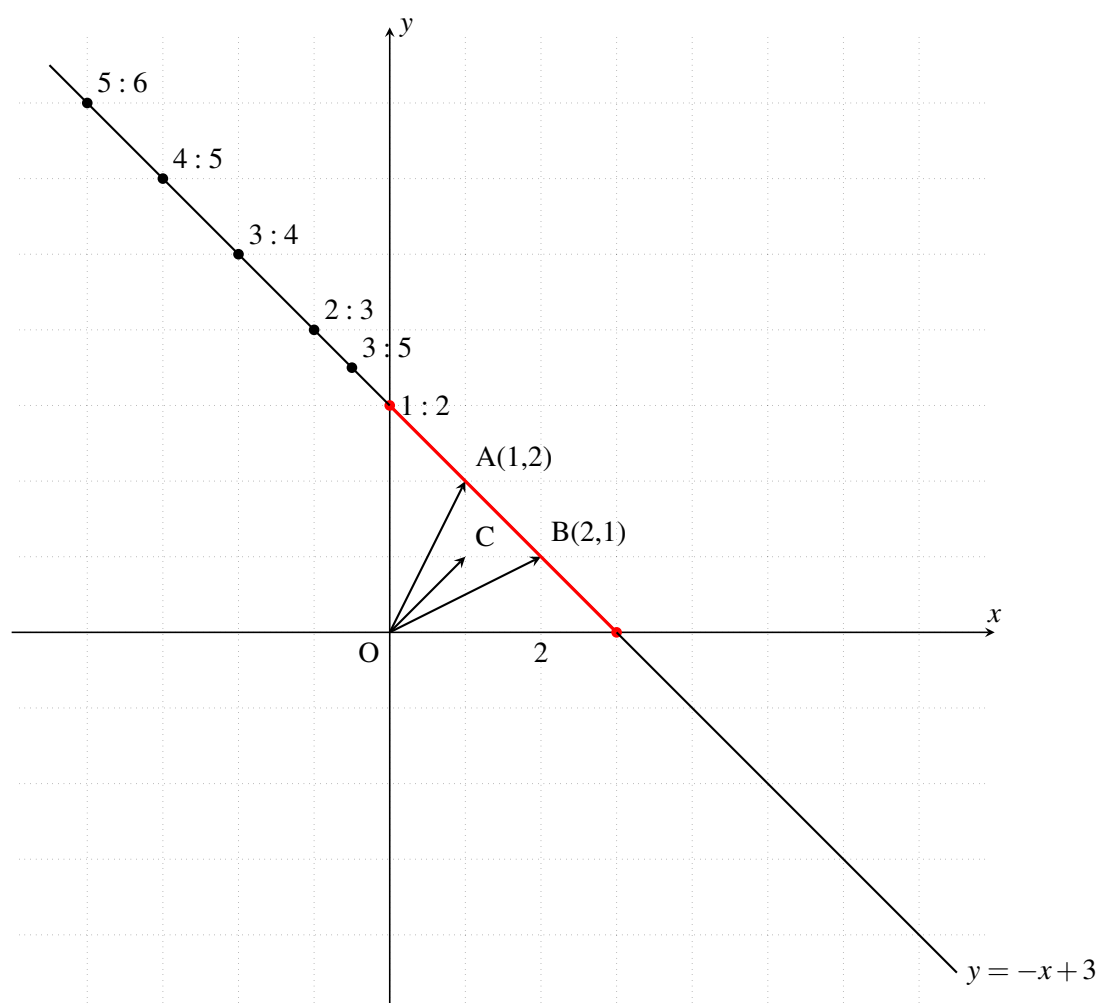
(1) $(0, 3)$ は線分 AB を 1:2 に外分する点であり、それは (m, n) が $(1, 2), (2, 4), (3, 6)$ でコインが裏の場合に対応するから、 $P = (0, 3)$ となる確率は $\frac{3}{60} = \frac{1}{20}$

(2) $\vec{OP}$ と $\vec{OC}$ のなす角が $\frac{\pi}{4}$ 以下になるということは、P が $(0, 3)$ と $(3, 0)$ を結ぶ線分上（端点を含む）にある場合である。よって、コイン投げの結果が表の場合は、 (m, n) が何であっても条件は満たされる。

次に、コイン投げの結果が裏の場合を考える。1:2 の外分点が $(0, 3)$ 、2:1 の外分点が $(3, 0)$ になることから、条件が満たされないのは、外分比 $m:n$ について

$$\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{2}{1}$$

が成り立つ場合であることがわかる。これに対応する (m, n) の組は、 $(5, 6), (4, 5), (3, 4), (4, 6), (2, 3), (3, 5), (6, 5), (6, 4), (5, 4), (5, 3), (4, 3), (3, 2)$ の 12 通りである（下図を参照）。したがって、コイン投げの結果が裏のとき、条件を満たす (m, n) の組は $30 - 12 = 18$ 通りであるから、答は $\frac{30+18}{60} = \frac{4}{5}$ となる。



■出題意図

[1]

微積分二次関数の積分計算を通じて、絶対値を含む関数の分割と適切な積分の設定ができるかを確認する。また、導関数を用いた極値の判定や増減表の作成を通じて、関数の変化を正しく把握できるかを試す問題である。

[2]

小数の桁数、および最初に出現する数の計算を通じて、対数の基本的な知識や演算ができるか、および指数法則を用いて問題を適切な数式に表現できるかを試す問題である。

[3]

線分に対する内分点と外分点の概念を理解し、その位置ベクトルを明確に図示できることを確認する。さらに、ベクトルが確率的に定まる場合において、2つのベクトルのなす角に関する確率を組み合わせ論的に求めることができるかをチェックする問題である。

成城大学 2025 年度 学部別選抜 (A方式)
2月7日：数学

■解答例

- [1] (1) 1回のじゃんけんで4人の手の出し方の総数は $3^4 = 81$ 通り。Aだけが勝つとき、Aの手の出し方は3通り。この手に応じた他の3人の負け方は1通り。よって求める確率は

$$\frac{3}{81} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

- (2) Aを含む2人が勝つときは、敗者の2名もそれに応じた同じ手なので3通り。他の3人の中から勝者になる1名を選び出すのも3通り。よって求める確率は

$$3 \times \frac{3}{81} = \frac{1}{9}$$

- (3) Aを含む3人が勝つとき、勝ち方は3つの手に応じた3通り。3人の組み合わせは、それぞれ1名の異なる敗者が出るときで3通り。よって求める確率は

$$3 \times \frac{3}{81} = \frac{1}{9}$$

- (4) 「誰も勝たない」のは「あいこが起きる」ときで、以下の(a), (b)のいずれかの場合である。

(a) 全員が同じ手を出す場合で3通り。

(b) 2人が同じ手で、他の2人が残りの2つの異なる手の場合。例えば、2人が「グー」で残りの2人が「チョキ」と「パー」の場合を考える。このとき4人から「グー」の2名を選ぶ組み合わせは ${}_4C_2 = 6$ で6通り。残りの2名の手は「チョキ」と「パー」かその逆の2通り。全体として $6 \times 2 = 12$ 通りがある。これが3種類の手について存在するので、全体として $12 \times 3 = 36$ 通り。

以上の(a)と(b)を併せると、求める確率は

$$\frac{3 + 36}{81} = \frac{13}{27}$$

[2] (1) 多項式の割り算を行うと、商は $3x+2$ 、余りは $-19x+5$ となる。

(2) 与えられた条件から、

$$2x^3 + 6x^2 - 4x + 20 = P(x)(2x+6) - 10x + 2$$

となるから、これを整理して、

$$2x^3 + 6x^2 + 6x + 18 = P(x)(2x+6)$$

よって、 $2x^3 + 6x^2 + 6x + 18$ を $2x+6$ で割った商が $P(x)$ であり、

$$P(x) = x^2 + 3$$

(3) $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ であるから、両辺に $(x+3)(x-2)$ をかけて整理すると、

$$7x + 1 = (a+b)x - 2a + 3b$$

となる。これが x についての恒等式であるから、係数を比較して

$$a+b=7 \quad \text{かつ} \quad -2a+3b=1$$

これを解けば、 $a=4, b=3$

【別解】 $7x+1 = a(x-2) + b(x+3)$ に $x=2, x=-3$ をそれぞれ代入すると、

$$15 = 5b \quad \text{かつ} \quad -20 = -5a$$

となることから、 $a=4, b=3$ が得られる。これを元の式に代入すると、確かに x についての恒等式になっている。

[3] (1) 点 H は、平面 α 上にあることから、 s, t, u を実数として、

$$\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OC}, \quad s + t + u = 1$$

と表すことができる。よって、 $\overrightarrow{OH} = (s, \sqrt{2}t, \sqrt{3}u)$ と書ける。

また、線分 OH は平面 α と垂直であることから、 $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$ である。よって、 $\overrightarrow{AB} = (-1, \sqrt{2}, 0)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, \sqrt{3})$ より、

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = -s + 2t = 0$$

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = -s + 3u = 0$$

これより、 $t = \frac{1}{2}s$ 、 $u = \frac{1}{3}s$ であり、さらに $s + t + u = 1$ であることから、

$$\frac{11}{6}s = 1 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{6}{11}$$

となる。したがって、H の座標は、 $\left(\frac{6}{11}, \frac{3\sqrt{2}}{11}, \frac{2\sqrt{3}}{11}\right)$ である。

(2) 四面体 OABC は、底面 OAB、高さ OC の三角錐であると考えられることから、その体積 V は、

$$V = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2}\right) \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

である。

(3) 四面体 OABC は、底面 ABC、高さ OH の三角錐であるとも考えることができる。よって、三角形 ABC の面積を S とおくと、(2) の V について $V = \frac{1}{3}S \times OH$ が成り立つ。ここで、(1) から

$$OH = |\overrightarrow{OH}| = \frac{1}{11} \sqrt{6^2 + (3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{66}}{11}$$

となることから、

$$S = 3 \frac{V}{OH} = 3 \times \frac{\sqrt{6}}{6} \times \frac{11}{\sqrt{66}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

【別解】(1) より、 $\overrightarrow{AB} = (-1, \sqrt{2}, 0)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, \sqrt{3})$ であり、 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$ 、 $|\overrightarrow{AC}| = 2$ 、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$ が成り立つ。したがって、三角形 ABC の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

■出題意図

[1]

場合の数と確率を理解し、計算できるかどうかを現実的な応用課題を用いて試す問題である。4人で「じゃんけん」をした場合に生じるいくつかの事象について、条件に即して事象を場合分けし、それぞれの場合の数を求め、条件付き確率を計算できるかどうかを試した。

[2]

多項式の基礎的な計算問題を通して、多項式に関する基本的な知識の確認と正確な計算能力の有無を確認する。式を適切に整理する能力や、集中力を維持して最後まで正確に計算する能力を測る問題である。

[3]

空間図形について、ベクトルの成分表示や位置ベクトルによる表示を用いて、ベクトル間の関係からベクトルの内積を用いるなどして、その演算を通じて、座標や空間図形の体積やそのある面の面積を求めることができるといった、ベクトルに関する基礎的な能力を有することを確認する問題である。